TD O11 : lois de l'optique géométrique

Exercice 1 - arc-en-ciel **

Soit une goutte d'eau sphérique ($n = 1.33$) recevant un rayon incident avec un angle d'incidence i. La figure 1 montre la goutte en coupe.

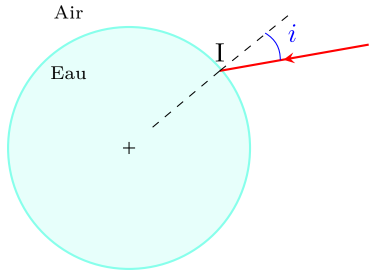

FIGURE 1

Étude de la déviation

Le rayon reçu par la goutte est monochromatique.

1.1. Recopier la figure et tracer le trajet du rayon lumineux incident dans la goutte d'eau puis lorsqu'il ressort après une seule réflexion interne.
Donner des noms adéquats aux angles.

1.2. Déterminer la déviation du rayon qui sort de la goutte en fonction de i et n.

1.3. Montrer que cette déviation passe par un extremum D_{m} pour une valeur i noté i_{m} que l'on calculera.

1.4. Pour cette valeur de i_{m}, on sait que D_{m} est un minimum (pour le démontrer, il faut établir que la dérivée seconde $D''(i)$ est positive).
Calculer ce minimum.

1.5. La courbe donnant la déviation en fonction de l'angle d'incidence est donnée sur la figure 2. Expliquer pourquoi il y a accumulation de lumière dans une direction (préciser laquelle).

1.6. Expliquer pourquoi l'arc-en-ciel est un arc (schéma ?).

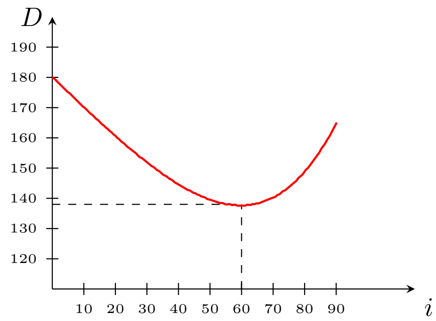

FIGURE 2 – D=f(i)

Étude de la dispersion

Le rayon reçu par la goutte est maintenant un rayon de lumière blanche.

2.1. La valeur de la déviation minimale est-elle la même pour les radiations de différentes couleurs ? Justifier.

2.2. Quelle est la radiation la plus déviée ? La moins déviée ? Justifier.

2.3. Faire un schéma montrant pourquoi l'observateur voit les radiations bleues au centre de l'arc-en-ciel et les radiations rouges à l'extérieur (éléments du schéma : soleil, gouttes, observateur et rayons lumineux).

Quelques indications

— Pour trouver la déviation D, il faut sommer 3 déviations. Il y en a une à chaque point de contact du rayon avec la surface de la goutte ;

— A l'intérieur de la goutte, on rencontre des triangles isocèles ;

— La dérivée de $\arcsin u$ est $\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

Solution

Étude de la déviation

1.1. Construction :

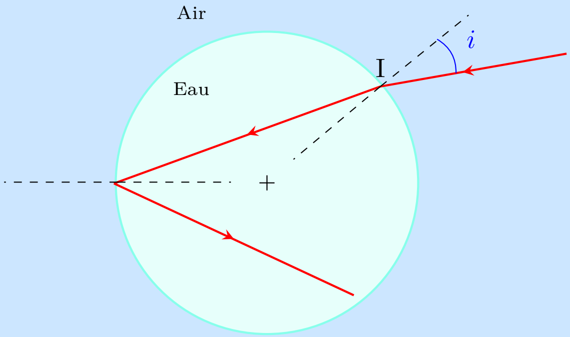

FIGURE 3

1.2. En choisissant des angles non orientés, on exprime les trois déviations :

$$D = (i - r) + (\pi - 2r) + (i - r) \text{ car pour } D_2 \text{ on a } \pi = D_2 + r + r \quad (1)$$

D'où :

$$\boxed{D = \pi + 2i - 4r} \quad (2)$$

En choisissant des angles orientés (de la normale vers le rayon), avec un sens trigonométrique positif, on écrit :

$$D_1 : -D_1 = i - r \Longleftrightarrow D_1 = -i + r \quad (3)$$

$$D_2 : D_2 - r - r = \pi \Longleftrightarrow D_2 = \pi + 2r \quad (4)$$

$$D_3 : D_3 = -i - (-r) = -i + r \quad (5)$$

D'où :

$$D = \pi - 2i + 4r \text{ avec i et r des grandeurs algébriques} \quad (6)$$

Mais d'après le sens trigonométrique choisi, $i < 0$, $r < 0$ donc :

$$\boxed{D = \pi + 2i - 4r} \text{ avec i et r des angles positifs} \quad (7)$$

On utilise ensuite la loi de Descartes pour exprimer r en fonction de i :

$$sini = n \sin r \text{ d'où } r = \arcsin \frac{\sin i}{r} \quad (8)$$

Et donc :

$$D = \pi + 2i - 4 \arcsin \frac{\sin i}{r} \quad (9)$$

1.3. Pour trouver l'extremum de la fonction D=f(i) ; il faut annuler sa dérivée première :

$$D'(i) = -2 + 4\frac{\cos i}{n} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{n^2}}} \quad (10)$$

$$= 2 - \frac{4 \cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} \quad (11)$$

Cette dérivée s'annule si :

$$\frac{2 \cos i_m}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i_m}} = 1 \quad (12)$$

$$\Longleftrightarrow 4 \cos i_m = n^2 - \sin^2 i_m = n^2 - 1 + \cos^2 i_m \quad (13)$$

$$\Longleftrightarrow 3 \cos^2 i_m = n^2 - 1 \quad (14)$$

$$\Longleftrightarrow i_m = \arccos \sqrt{\frac{n^2 - 1}{3}} \quad (15)$$

On trouve $i_m = 59°$.

1.4. On trouve $D_m = 138°$.

1.5. La goutte reçoit des rayons avec toutes les incidences, la déviation de ces rayons est donc variable. Mais d'après la courbe, on voit qu'au niveau du minimum de déviation D_m, tous les rayons incidents avec un angle compris entre 50 et 70° sont déviés de D_m. Il y a donc plus de rayons dans cette direction, donc une accumulation de lumière.

1.6. L'arc en ciel est un arc car chaque couleur est déviée selon un angle fixe par rapport au soleil, donc d'un angle fixe (notons le α) par rapport au point antisolaire (point sur l'horizon dans la direction opposée à celle du soleil).
Toute les gouttes situées sur l'arc de cercle bordant le cône d'angle α dévient la lumière en direction de l'observateur.

Étude de la déviation

2.1. D_m est différent pour chaque couleur car l'eau est un milieu dispersif et dévie la lumière différemment selon la couleur (angles de réfraction différents).

2.2. Comme pour un prisme, la radiation la plus déviée est la bleue, la moins déviée la rouge. L'indice de l'eau pour le bleu est plus grand que l'indice de l'eau pour le rouge.

2.3. Si on prend une succession de gouttes verticales parallèles à l'observateur, c'est la goutte du bas qui va lui envoyer la lumière bleue, puis celle du dessus la radiation verte (car celle-ci est moins déviée), puis celle encore au dessus lui enverra la radiation orange (encore moins déviée), etc.